Dzień pierwszy - grupa starsza

1. Załóżmy, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi dodatnimi takimi, że $a(b+c) = 152$, $b(c+a) = 162$ oraz $c(a+b) = 170$. Wyznacz wartość wyrażenia abc.

2. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC znajduje się punkt P taki, że

$$|PA| = 6, \quad |PB| = 8, \quad |PC| = 10.$$

   Wyznacz pole trójkąta ABC.

3. Na tablicy napisano ciąg kolejnych n liczb całkowitych, począwszy od 1. Następnie wymazano jedną z zapisanych liczb, powiedzmy k. Średnia arytmetyczna pozostałych liczb równa jest $35\frac{7}{17}$. Znajdź najmniejszą liczbę k, którą można wymazać (spośród wszystkich k dla wszystkich możliwych n), aby uzyskać powyższe warunki.

4. Na przyjęciu spotkało się 2013 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykaż, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu. Uwaga. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

5. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $|AB| \neq |AC|$. Proste BI i CI przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E. Wyznaczyć wszystkie miary kąta BAC, dla których może zachodzić $|DI| = |EI|$.

Dzień pierwszy - grupa starsza - rozwiązania

1. Z warunków zadania wynika, że zachodzi układ równań:

$$\begin{cases} ab + ac = 152 \\ ab + bc = 162 \\ ac + bc = 170 \end{cases}.$$

Dodając te równania stronami otrzymujemy $2ab + 2bc + 2ac = 484$. Zatem $ab + bc + ac = 242$. Porównując tę równość z każdą z równości wymienionych w układzie równań dostajemy: $ab = 242 - 170 = 72$, $bc = 242 - 152 = 90$, $ac = 242 - 162 = 80$. Zatem $(ab)(bc)(ca) = 80 \cdot 90 \cdot 72$. Szukana liczba abc jest pierwiastkiem kwadrateowym tej wielkości (ponieważ $a, b, c > 0$) i wynosi 720.

2. Odbijamy punkt P względem każdego z trzech boków AB, BC, CA otrzymując odpowiednio punkty P_1, P_2, P_3. Następujące pary trójkątów są w ten sposób przystające: AP_1B oraz APB, dalej BP_2C oraz BPC, wreszcie CP_3A oraz CPA. Zatem $[AP_1BP_2CP_3] = 2[ABC]$, gdzie przez $[X_1 \dots X_n]$ oznaczamy pole wielokąta (w naszym przypadku zawsze – wypukłego) $X_1 \dots X_n$. Z drugiej zachodzi rowność:

$$[AP_1BP_2CP_3] = [P_1P_2P_3] + [P_1BP_2] + [P_2CP_3] + [P_3AP_1].$$

Zauważmy, że kąty $\measuredangle P_1BP_2, \measuredangle P_2CP_3, \measuredangle P_3AP_1$ mają miary 120°. Co więcej $|P_1B| = |BP_2| = 8$, $|P_2C| = |CP_2| = 10$, $|P_3A| = |AP_1| = 6$. Zatem

$$[P_1BP_2] + [P_2CP_3] + [P_3AP_1] = \frac{(64 + 100 + 36)\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3}.$$

Natomiast $|P_1P_2| = 8\sqrt{3}$, $|P_2P_3| = 10\sqrt{3}$, $|P_3P_1| = 6\sqrt{3}$. Trójkąt $P_1P_2P_3$ jest zatem prostokąty i jego pole równe jest 72. Zatem $[AP_1BP_2CP_3] = 72 + 50\sqrt{3}$. Stąd $[ABC] = 36 + 25\sqrt{3}$.

3. Załóżmy, że przed wymazaniem pewnej liczby na tablicy znajdowało się n kolejnych liczb całkowitych, począwszy od 1. Suma elementów tego zbioru to $\frac{n(n+1)}{2}$. Przyjmijmy, że wymazana została liczba $k \leqslant n$. Warunek dotyczący średniej pozostałych na tablicy liczb możemy zatem przepisać w postaci następującego równania:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - k}{n-1} = 35\frac{7}{17} \Rightarrow 17\left(\frac{n(n+1)}{2} - k\right) = 602(n-1).$$

Jest jasne, że $NWD(602, 17) = 1$, a zatem $n - 1$ jest liczbą podzielną przez 17. Zatem n ma postać $n = 17p + 1$, dla pewnego $p \geqslant 1$ całkowitego. Nasza równość przybiera zatem postać:

$$(17p + 1)(17p + 2) - 2k = 1204p.$$

Po rozwinięciu otrzymujemy równanie postaci:

$$289p^2 - 1153p + 2 = 2k.$$

Zauważmy, że minimum funkcji kwadratowej znajdującej się po prawej stronie jest przyjmowane dla $p = 1153/578 \simeq 1.99$. Zatem argumentem całkowitym p, dla któregp $f(p) = 289p^2 - 1153p + 2$ przyjmuje najmniejszą wartość całkowitą jest $p = 2$. Łatwo widzieć, że dla $p = 1, 2, 3$ funkcja $f(p)$

przyjmuje wartości ujemne. Zatem najmniejszym argumentem całkowitym dodatnim p, dla którego $f(p)$ przyjmuje wartość całkowitą dodatnią jest $p = 4$. Wówczas $f(p) = 14$, a zatem $k = 7$. Zatem $k = 7$ jest najmniejszą liczbą, jaką można wymazać z tablicy kolejnych n (w tym przypadku: $n = 69$) liczb tak, by średnia pozostałych wyniosła $35\frac{7}{17}$.

4. Zadanie z III etapu VIII OMG. Przypuścmy, że wśród uczestników przyjęcia istnieje osoba A, która nie zna przynajmniej dwóch innych osób B i C. Wówczas spośród osób A, B, C nie można wskazać takiej, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Opisany przypadek jest zatem sprzeczny z warunkami zadania, skąd wniosek, że każdy uczestnik przyjęcia zna wszystkich innych lub nie zna dokładnie jednej z pozostałych osób.

   Zauważmy, że w takiej sytuacji ludzi, którzy się nie znają, możemy połączyć w pary. Gdyby nie istniała osoba, znająca wszystkich pozostałych, to każdy z obecnych należałby do jakiejś pary. Jest to jednak niemożliwe, gdyż liczba uczestników przyjęcia jest nieparzysta. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

5. Zadanie z II etapu 51 OM. Wykażemy, ze jedyną wartością przyjmowaną przez BAC jest $60°$. Skoro I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, to kąty IAD oraz IAE są równe. Zatem z twierdzenia sinusów, zastosowanego do trójkątów ADI oraz AEI otrzymujemy $sin(\measuredangle AEI) = sin(\measuredangle ADI)$. Zatem dostajemy dwa przypadki:

$$\measuredangle AEI = \measuredangle ADI \quad \text{lub} \quad \measuredangle AEI + \measuredangle ADI = 180°.$$

   Przypuśćmy najpierw, że zachodzi równość $\measuredangle AEI = \measuredangle ADI$. Wtedy również $\measuredangle AIE = \measuredangle AID$, co oznacza, że trójkąty AEI oraz ADI są przystające (cecha kbk). Zatem $|AD| = |AE|$. To dowodzi, że przystające są także trójkąty ADB i AEC (cecha kbk). Stąd uzyskujemy równość $|AB| = |AC|$, co przeczy założeniom poczynionym w treści zadania.

   Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym $\measuredangle AEI + \measuredangle ADI = 180°$. Wtedy punkty A, E, I, D leżą na jednym okręgu. Zatem:

$$\measuredangle BAC = \measuredangle DIC = \measuredangle IBC + \measuredangle ICB = \frac{1}{2}\measuredangle ABC + \frac{1}{2}\measuredangle BCA.$$

   Stąd otrzymujemy:

$$180° = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = \measuredangle BAC + 2\measuredangle BAC = 3\measuredangle BAC \Rightarrow \measuredangle BAC = 60°.$$

   Do zakończenia pozostało wykazać, że istnieje trójkąt ABC, w którym $|AB| \neq |AC$, $\measuredangle BAC = 60°$ oraz $|DI| = |EI|$. Wykażemy więcej: w każdym trójkącie ABC o kącie BAC równym $60°$ zachodzi równość $|DI| = |EI|$. Jeśli $\measuredangle BAC - 60°$, to

$$\measuredangle DIC = \frac{1}{2}\measuredangle ABC + \frac{1}{2}\measuredangle BCA = 90°$$

   oraz $\frac{1}{2}\measuredangle BAC = 60° = \measuredangle BAC$. Na czworokącie $AEID$ można więc opisać okrąg. Ponieważ AI jest dwusieczną kąta EAD, to $|DI| = |EI|$.

Dzień drugi - grupa starsza

1. Czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a, b, c, którego pole jest równe $\frac{1}{4}(ab+bc)$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Wyznacz wszystkie parami niepodobne trójkąty o obwodzie równym 20, których wszystkie boki mają długości całkowite.

3. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y spełniających równanie

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1.$$

4. Znajdź największą liczbę całkowitą dodatnią n spełniającą następujące dwa warunki:

   - n^2 może być przedstawiona jako różnica sześcianów dwóch kolejnych liczb całkowitych,
   - $2n + 79$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Niech $f(n)$ będzie liczbą całkowitą najbliższą do $\sqrt[4]{n}$, tzn. $f(n)$ równe jest takiemu całkowitemu k, dla którego wyrażenie $|\sqrt[4]{n} - k|$ przyjmuje, dla ustalonego n, minimalną wartość. Znajdź

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \ldots + \frac{1}{f(2003)}.$$

Dzień drugi - grupa starsza - rozwiązania

1. Zadanie z II etapu VII OMG. Wykażemy, że taki trójkąt nie istnieje. Przypuśćmy, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c i polu równym $\frac{1}{4}(ab + bc)$. Oznaczmy przez h wysokość tego trójkąta opuszczoną na bok b. Wówczas:

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}(ab + bc), \quad \text{czyli} \quad h = \frac{1}{2}(a + c).$$

Z drugiej strony $h \leqslant a$ oraz $h \leqslant c$ oraz przynajmniej jedna z tych nierówności jest ostra (w przeciwnym razie trójkąt ten miałby dwa kąty proste). Wobec tego $2h < a + c$, czyli $h < \frac{1}{2}(a + c)$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

2. Załóżmy, że trójkąt o bokach długości $a \leqslant b \leqslant c$ jest jednym z szukanych. Jest jasne, że $c > 6$. W przeciwnym razie obwód trójkąta będzie mniejszy niż 20. Z drugiej strony jeśli $c \geqslant 10$, to $a + b \leqslant 10$ i nie jest spełniona nierówność trójkąta. Zatem c przyjmuje jedną z wartości: 7, 8 lub 9. Jeśli $c = 9$, wówczas trójka (a, b, c) ma jedną z postaci: $(5, 6, 9)$, $(4, 7, 9)$, $(3, 8, 9)$, $(2, 9, 9)$. Jeśli $c = 8$, wówczas trójka (a, b, c) ma jedną z postaci: $(6, 6, 8)$, $(5, 7, 8)$, $(4, 8, 8)$. W przypadku, gdy $c = 7$, trójka (a, b, c) ma jedną możliwą postać: $(6, 7, 7)$. Dostajemy zatem możliwe trójki (a, b, c):

$$(5, 6, 9), (4, 7, 9), (3, 8, 9), (2, 9, 9), (6, 6, 8), (5, 7, 8), (4, 8, 8), (6, 7, 7).$$

Pozostaje pokazać, że żadne dwa trójkąty o bokach długości a, b, c odpowiadające przedstawionym wyżej trójkom nie są podobne. Zauważmy, że trójkąty odpowiadające trójkom $(2, 9, 9)$, $(6, 6, 8)$, $(4, 8, 8)$, $(6, 7, 7)$ są równoramienne, a trójkąty odpowiadające pozostałym trójkom nie są równoramienne. Zatem żaden z wymienionych 4 trójkątów nie jest podobny do jednego z trójkątów opisanych trójką $(5, 6, 9), (4, 7, 9), (3, 8, 9), (5, 7, 8)$. Co więcej, na mocy cechy podobieństwa BBB możemy stwierdzić, że wszystkie trójkąty równoramienne opisane przez trójki $(2, 9, 9)$, $(6, 6, 8)$, $(4, 8, 8)$, $(6, 7, 7)$ są parami niepodobne. Pozostaje stwierdzić, czy pewne dwa trójkąty opisane przez trójki $(5, 6, 9), (4, 7, 9), (3, 8, 9), (5, 7, 8)$ są podobne. Na mocy cechy BBB podobieństwa widzimy, że jeśli trójkąty odpowiadające trójkom (a, b, c), (a', b', c') są podobne, to $a/a' = b/b' = c/c'$. Zatem $a = a' \Leftrightarrow b' = b \Leftrightarrow c' = c$, więc $c \neq c'$. Zatem trójkąty $(5, 6, 9), (4, 7, 9), (3, 8, 9)$ są parami niepodobne. Z tych samych powodów nie są podobne pary trójkątów $(5, 6, 9), (5, 7, 8)$ oraz $(4, 7, 9), (5, 7, 8)$ (przynajmniej jedna para odpowiadających sobie boków ma tę samą długość). Ostatnią parą, którą sprawdzamy jest para $(3, 8, 9)$, $(5, 7, 8)$. Skoro jednak $3/5 \neq 8/7$, to trójkąty wyznaczone przez tę parę trójek również nie są podobne. To kończy dowód.

3. Zadanie z I etapu 54 OM. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$ mamy

$$xy = x \cdot \frac{y}{2} + y \cdot \frac{x}{2} \geqslant x + y.$$

Zatem dla liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$ prawdziwe są nierówności

$$2(xy)^2 + 1 > (xy)^2 \geqslant (x + y)^2,$$

co oznacza, że dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych (a nawet rzeczywistych) $x, y \geqslant 2$. Wobec tego, jeśli para liczb całkowitych dodatnich spełnia dane w treści zadania równanie to jedna z liczb x, y musi być równa 1. Przyjmijmy, ze względu na symetrię, że tą liczbą jest x. Dane równanie przyjmuje wówczas postać $(y+1)^2 - 2y^2 = 1$. Dostajemy zatem $y = 2$. Równanie ma więc dwa rozwiązania (x, y) postaci $(1, 2)$ oraz $(2, 1)$.

4. Niech $n^2 = (m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1$, lub równoważnie:

$$(2n+1)(2n-1) = 4n^2 - 1 = 12m^2 + 12m + 3 = 3(2m+1)^2.$$

Skoro $2n+1$ oraz $2n-1$ są obydwie nieparzyste i ich różnica wynosi 2, to są to liczby względnie pierwsze. Skoro jednak ich iloczyn jest trzykrotnością kwadratu liczby całkowitej, to jedna z nich musi być kwadratem, a druga musi być trzykrotnością kwadratu. Nie jest możliwe, aby $2n-1$ było trzykrotnością kwadratu, ponieważ wówczas $2n+1$ byłoby kwadratem przystającym 2 modulo 3, co nie jest możliwe.

Zatem $2n-1 = b^2$, dla pewnego b całkowitego dodatniego. Także $2n+79$ jest kwadratem, powiedzmy a^2, dla pewnego a całkowitego dodatniego. Jest jasne, że $a > b$. Zatem $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = 80$. Skoro $a-b$ oraz $a+b$ mają tę samą parzystość oraz ich iloczyn jest parzysty, to każdy z czynników jest parzysty. Skoro $n = (b^2-1)/2$, to aby zmaksymalizować n wystarczy zmaksymalizować b. Wiadomo natomiast, że $2b = (a+b) - (a-b)$. Łatwo widzieć, że różnica powyższa jest maksymalna, gdy $a+b = 40$, zaś $a-b = 2$. Wówczas $a = 21, b = 19$, a stąd $n = 181$ oraz $m = 104$. Zatem odpowiedź to 181.

5. Skoro $f(n)$ jest liczbą całkowitą najbliższą $\sqrt[4]{n}$ to wiemy, że $|\sqrt[4]{n} - f(n)| < 1/2$. Wynika stąd, że zachodzą nierówności:

$$(f(n) - 1/2)^4 < n < (f(n) + 1/2)^4.$$

Jak interpretować te nierówności? Dla przykładu, jeśli n jest liczbą z przedziału $(0.5^4, 1.5^4)$, wówczas $f(n) = 1$. Jeśli n jest liczbą z przedziału $(1.5^4, 2.5^4)$, wówczas $f(n) = 2$. Ogólnie, jeśli liczba n jest z przedziału $((k-0.5)^4, (k+0.5)^4)$, wówczas $f(n) = k$. Używając wyrażeń dwumianowych:

$$(k - 0.5^4) = k^4 - 2k^3 + \frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16}, \quad (k + 0.5^4) = k^4 + 2k^3 + \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{16},$$

widzimy, że $(k+0.5)^4 - (k-0.5)^4 = 4k^3 + k$, co jest liczbą całkowitą dla każdego k całkowitego. Innymi słowy dokładnie $4k^3 + k$ wartości liczby n daje wartość $f(n) = k$. Przykładowo, dokładnie $4 \cdot 1^3 + 1 = 5$ wartości liczby n daje $f(n) = 1$. Następnie $4 \cdot 2^3 + 2 = 34$ wartości liczby n dają $f(b) = 2$ itd. Interesuje nas policzenie sumy wyrażeń postaci $\frac{1}{f(n)}$ dla $1 \leqslant n \leqslant 2003$. W sumie tej jest dokładnie $4k^3 + k$ wyrazów postaci $\frac{1}{k}$, czyli suma ta ma postać:

$$\underbrace{\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}}_{5} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{34} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k}}_{k^3+k} + \ldots + \frac{1}{f(2003)}.$$

Cała suma ma 2003 składników, w tym: 5 składników 1/1, 34 składniki równe 1/2, 111 składników postaci 1/3, 260 składników postaci 1/4, 505 składników postaci 1/5, 870 składników postaci 1/6 oraz 2003 - (5 + 34 + 111 + 260 + 505 + 870) = 228 składników postaci 1/7. Zatem suma ma postać:

$$5 \cdot \frac{1}{1} + 34 \cdot \frac{1}{2} + 111 \cdot \frac{1}{3} + 260 \cdot \frac{1}{4} + 505 \cdot \frac{1}{5} + 870 \cdot \frac{1}{6} + 218 \cdot \frac{1}{7} = 370 + \frac{218}{7} = 401\frac{4}{7}.$$

Dzień trzeci - grupa starsza

1. Zakładając, że:

$$\frac{1}{2!17!}+\frac{1}{3!16!}+\frac{1}{4!15!}+\frac{1}{5!14!}+\frac{1}{6!13!}+\frac{1}{7!12!}+\frac{1}{8!11!}+\frac{1}{9!10!}=\frac{N}{1!18!}$$

znajdź największą liczbą całkowitą nie większą niż $\frac{N}{100}$.

2. W centrum wielkiej (i płaskiej) prerii, przy przecięciu dwóch prostopadłych autostrad stacjonuje wóz strażacki. Wóz ten może podróżować po autostradzie 50 mil na godzinę, a po prerii - 14 mil na godzinę. Rozważmy zbiór punktów prerii, do których wóz strażacki może dojechać w ciągu 6 minut. Wyznacz pole tego obszaru.

3. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

4. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o. Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że:

$$|PQ|^2 = |PB|^2 + |QC|^2.$$

5. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z, że:

$$0 < x < y < z < p.$$

Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p, to liczba $x^2+y^2+z^2$ jest podzielna przez $x+y+z$.

Dzień trzeci - grupa starsza - rozwiązania

1. Mnożymy obydwie strony równości przez 19!, aby otrzymać równość:

$$\binom{19}{2}+\binom{19}{3}+\ldots+\binom{19}{9}=19N.$$

Wiadomo, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. Zatem dostajemy równość:

$$\binom{19}{2}+\binom{19}{3}+\ldots+\binom{19}{17}=38N.$$

Dla dowolnego n całkowitego dodatniego zachodzi natomiast równość:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Zatem:

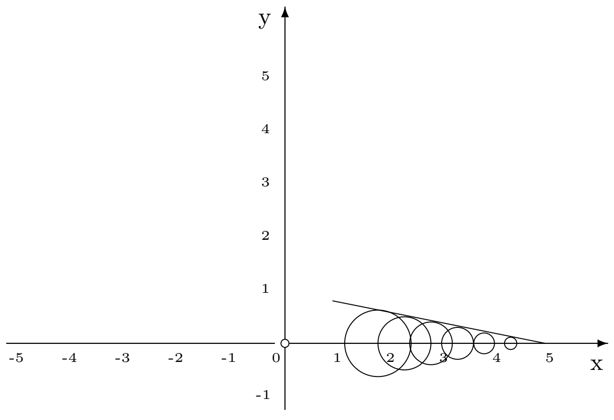
$$38N=2^{19}-\binom{19}{0}-\binom{19}{1}-\binom{19}{18}-\binom{19}{19}=2^{19}-1-19-1-19=2^{19}-40.$$

Stąd N równe jest:

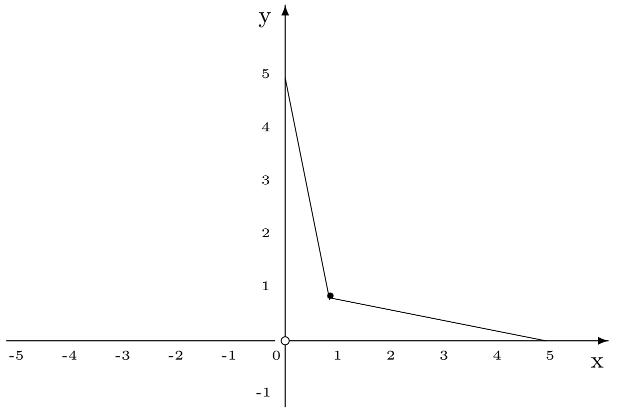
$$\frac{2^{18}-20}{19}=\frac{(2^9+1)(2^9-1)}{19}-1=13796.$$

Zatem odpowiedź to 137.

2. Przyjmujemy, że preria jest płaska i wprowadzamy układ współrzędnych OXY o środku O w punkcie przecięcia autostrad. Osie OX, OY są natomiast prostymi zawierającymi autostrady przecinające się w O. Rozważmy przypadek, gdy wóz porusza się w kierunku punktu w pierwszej ćwiartce przemierzając najpierw pewien odcinek autostrady. Po przebyciu x mil, $t=d/r=x/50$ czasu minęło. Jeśli wóz opuszcza autostradę, może podróżować jeszcze przez $t=\frac{1}{10}-\frac{x}{50}$ godzin, a więc przebyć $d=rt=14t=1.4-\frac{7x}{25}$ mil. Może zatem zakończyć trasę w dowolnym punkcie zawartym w kole S_x o środku $(x,0)$ oraz promieniu $1.4-\frac{7x}{25}$. Jeśli $x=5$, wówczas S_x jest okręgiem o promieniu 0. Wszystkie okręgi postaci S_x, dla $x\in[0,5]$ są jednokładne o środku jednokładności w punkcie $(5,0)$. Okręgi te mają wspólną styczną przechodzącą przez punkt (5,0).



Wyznaczmy równanie tej prostej stycznej. Nazwijmy ją l_1. Rozważamy okrąg o środku w $(0,0)$. Ma on promień 1.4. Załóżmy, że szukana prosta l_1 jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Z Twierdzenia Pitagorasa $|AB|^2+|AO|^2=|OB|^2$, a więc $|AB|=\sqrt{5^2-1.4^2}=\frac{24}{5}$. W takim razie tangens kąta ABO wynosi $\frac{7}{24}$, a więc nachylenie szukanej prostej to $-\frac{7}{24}$. Skoro prosta ta przechodzi przez punkt $(5,0)$, to jej równanie ma postać: $y = -\frac{7}{24}(x-5)$. Prosta l_1, razem z osią x ogranicza region, w który wóz strażacki może zajechać przy założeniu, że w każdej chwili przyrasta współrzędna x położenia tego wozu. Analogicznie, prosta l_2 opisana równaniem $y = 5 - \frac{24}{7}x$ ogranicza region w jaki wóz ten może zajechać przy założeniu, że w każdej chwili przyrasta współrzędna y. Zatem w pierwszej ćwiartce wóz strażacki może dotrzeć do regionu ograniczonego prostymi l_1 oraz l_2 przecinającymi się w punkcie $(35/31, 35/31)$ oraz osiami OX i OY.



Zatem pole całego obszaru jest sumą pola kwadratu o boku $70/31$ oraz czterech trójkątów o podstawach długości $70/31$ i wysokościach równych $5 - 35/31$, a więc wynosi ono:

$$(70/31)^2 + 4 \cdot 70/31 \cdot (5 - 35/31)/2 = 70/31(70/31 + 10 - 70/31) = 700/31.$$

3. Zadanie z II etapu II OMG. Zauważmy najpierw, że z pewnego punktu wychodzą co najmniej 4 odcinki: w przeciwnym razie wszystkich odcinków byłoby co najwyżej $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$, a jest ich 10. Oznaczmy więc dane punkty przez A, B, C, D, E, F oraz przyjmijmy, że punkt A jest połączony z punktami B, C, D, E. Z punktu F wychodzi co najwyżej 5 odcinków, a zatem skoro wszystkich odcinków jest 10, to pewne dwa punkty spośród B, C, D, E muszą być połączone. Punkty te wraz z punktem A dają żądany trójkąt.

4. Zadanie z I etapu 54 OM. Niech M będzie środkiem odcinka AB. Wówczas trójkąt PMQ jest prostokątny. Na mocy twierdzenia Pitagorasa oraz podobieństwa trójkątów QBC i QCA otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= |PM|^2 + |QM|^2 = \\ &= |PB|^2 - |MB|^2 + |QM|^2 = \\ &= |PB|^2 + (|QM| - |MB|)(|QM| + |MB|) = \\ &= |PB|^2 + |QB| \cdot |QA| = |PB|^2 + |QC|^2.\end{aligned}$$

5. Zadanie z III etapu 54 OM. Ponieważ liczba $y^3 - x^3 = (y-x)(x^2+xy+y^2)$ jest podzielna przez p oraz $0 < y - x < p$, a więc liczba $x^2 + xy + y^2$ jest podzielna przez p. Podobnie liczby $y^2 + yz + z^2$ oraz $x^2 + xz + z^2$ są podzielne przez p. Zatem liczba:

$$(x^2 + xy + y^2) - (y^2 + yz + z^2) = (x - z)(x + y + z)$$

jest również podzielna przez p, co implikuje podzielność przez p liczby $x+y+z$. Liczba ta, jako mniejsza niż $3p$ jest więc równa p lub $2p$.

Z podzielności przez p liczb x^2+xy+y^2, y^2+yz+z^2 oraz x^2+xz+z^2 wynika podzielność przez p ich sumy pomnożonej przez 2 czyli liczby:

$$2(2x^2+2y^2+2z^2+xy+yz+xz)=3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2.$$

Z danych w treści zadania wnioskujemy, że $p>3$, co w połączeniu z powyższą równością dowodzi podzielności przez p liczby $x^2+y^2+z^2$.

Zatem w przypadku $x+y+z=p$ zadanie zostało rozwiązane. Jeśli zaś $x+y+z=2p$, to z równości $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ wynika, że liczba $x^2+y^2+z^2$ jest parzysta. Jest ona również podzielna przez p, a zatem dzieli się także przez $x+y+z$.